春季集中セミナー　距離空間と抽象位相とは、何だろうか　講義報告[1]

２００８年4月１９日（土）　１４：００−１９：００
２００８年4月２０日（日）　１０：００−１６：００

1　距離空間と距離関数

定義 1.1 (距離関数). X を空でない集合とする。写像 $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ が**距離関数** *(metric function)* であるとは、ρ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ について、次の性質を満たすことである。

D1) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0 \quad \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$　（正定値性）

D2) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$　（対称性）

D3) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$　（三角不等式）

X 上に距離関数 ρ が与えられたとき、(X, ρ) を距離関数 ρ による**距離空間** *(metric space)* と言う。

定義 1.2 (ノルム空間). V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする。写像 $\eta : V \to \mathbb{R}$ が**ノルム** *(norm)* であるとは、η が任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ について、次の性質を満たすことである。

N1) $\eta(\boldsymbol{u}) \geq 0 \quad \eta(\boldsymbol{u}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = 0$　（正定値性）

N2) $\eta(\lambda \boldsymbol{u}) = |\lambda| \eta(\boldsymbol{u})$　（スカラー倍）

N3) $\eta(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \leq \eta(\boldsymbol{u}) + \eta(\boldsymbol{v})$　（三角不等式）

X 上にノルム η が与えられたとき、(X, η) をノルム η による**ノルム空間** *(normed space)* と言う。

練習問題 1.1 (ノルムから導かれる距離). (V, η) をノルム空間とするとき、

$$\rho_\eta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \eta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \quad for\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$$

とおいたとき、$\rho_\eta : V \times V \to \mathbb{R}$ は距離関数になることを示せ。このとき、ρ_η をノルム η から導かれた距離と言う。

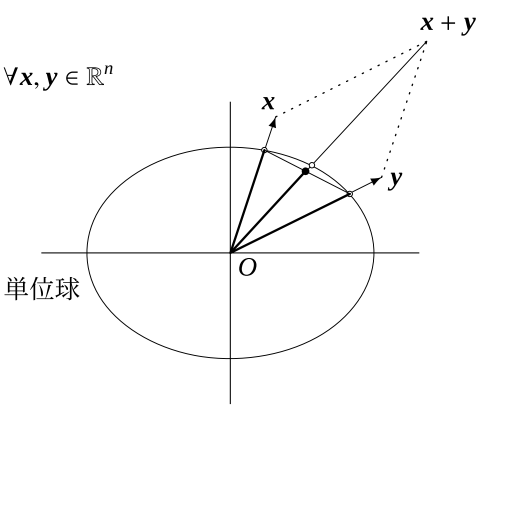
補題 1.1 (ミンコフスキーの不等式). 任意の $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおいたとき、

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p \quad for\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

が成立する。この不等式を**ミンコフスキーの不等式**と言う。



[1]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

証明. **第１段）**

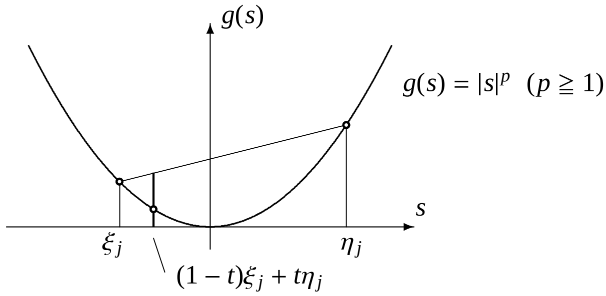
$$\overline{B}_p = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|_p \leq 1\}$$

とおいたとき、$\overline{B}_p$ が凸図形になることを示す。

任意の $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $\boldsymbol{y} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \overline{B}_p$ に対して、

$$\|(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |(1-t)\xi_i + t\eta_i|^p \quad 0 \leq t \leq 1$$

ここで、$g(x) = |x|^p$ $(p \geq 1)$ を考えると、g は x の凸関数であるから、



$$\sum_{i=1}^{n} |(1-t)\xi_i + t\eta_i|^p = \sum_{i=1}^{n} g((1-t)\xi_i + t\eta_i) \leq \sum_{i=1}^{n} ((1-t)g(\xi_i) + tg(\eta_i))$$

$$= (1-t)\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) + t\sum_{i=1}^{n} g(\eta_i) = (1-t)\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p + t\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^p$$

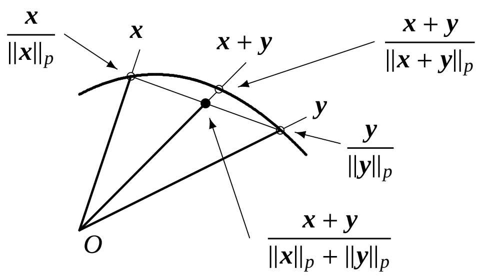
$$\therefore \quad \|(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\|_p^p \leq (1-t)\,\|\boldsymbol{x}\|_p^p + t\,\|\boldsymbol{y}\|_p^p$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \overline{B}_p$ より、$\|\boldsymbol{x}\|_p \leq 1$, $\|\boldsymbol{y}\|_p \leq 1$ だから、

$$\|(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\|_p^p \leq (1-t)\,\|\boldsymbol{x}\|_p^p + t\,\|\boldsymbol{y}\|_p^p \leq (1-t) + t = 1$$

したがって、$(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \in \overline{B}_p$ となるから、$\overline{B}_p$ は凸図形である。

第２段）$\overline{B}_p$ が凸図形になることを使って、ミンコフスキーの不等式を導く。$\boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{R}^n}$ または、$\boldsymbol{y} = 0_{\mathbb{R}^n}$ のときは明らかだから、$\boldsymbol{x} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ かつ、$\boldsymbol{y} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ とする。



図から，幾何学的には，$\dfrac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p}$ は単位球 $\widetilde{B}_p$ の球面上にあるのに対し，$\dfrac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p}$ は $\widetilde{B}_p$ の内部に入っていることが分かる．

$$\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p} = \left(\frac{\|\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p} + \left(\frac{\|\boldsymbol{y}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_p}$$

と変形すれば $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$, $\dfrac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_p} \in \overline{B}_p$ だから、$\overline{B}_p$ が凸図形であることにより $\dfrac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p} \in \overline{B}_p$ となるから、

$$\left\|\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|_p+\|\boldsymbol{y}\|_p}\right\|_p \leq 1$$

$$\therefore \quad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$$

□

定理 1.1. 任意の $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

1.
$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \in \mathbb{R},\ p \geq 0)$$
と定義するとき、$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はノルムである。このとき、$\|\boldsymbol{x}\|_p$ を $\boldsymbol{x}$ の **p 乗ノルム**と言う。

2.
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|\xi_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$$
と定義するとき、$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はノルムである。このとき、$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ を $\boldsymbol{x}$ の**スープ・ノルム**と言う。

練習問題 1.2. $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_\infty$ から導かれる以下の関数は、すべて距離関数であることを示せ。

1. $d_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p$
2. $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_\infty$
3. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p}{1+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p} \quad p \geq 1,\ p = \infty$
4. $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ が線形従属なとき}) \\ \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \text{ が線形独立なとき}) \end{cases} \quad p \geq 1,\ p = \infty$

1.1 上限

定義 1.3 (上限・下限). M を数直線 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とするとき、

$$U(M) = \{u \in \mathbb{R} \mid m \leq u \quad for\ \forall m \in M\}$$
$$L(M) = \{l \in \mathbb{R} \mid l \leq m \quad for\ \forall m \in M\}$$

により定義される集合 $U(M)$ を集合 M の**上界 *(upper bound)***、集合 $L(M)$ を集合 M の**下界 *(lower bound)*** と言う。$U(M) \neq \emptyset$ のとき M **は上に有界 *(bounded)***、$L(M) \neq \emptyset$ のとき M **は下に有界**と言う。
M が上に有界なとき、$\min U(M)$ を M の**上限 *(supremum)*** といい、$\sup M$ と記す。
M が下に有界なとき、$\max U(M)$ を M の**下限 *(infimum)*** といい、$\inf M$ と記す。

命題 1.1 ($Weierstra\beta$ の公理（制限完備性）). 任意の上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合 M は上限 $\sup M$ をもつ。すなわち、$\mathbb{R}$ の空でない集合 M が上に有界であれば、集合 M の上限が存在する。

定理 1.2. 上限について、次のことが成り立つ。

1. $\mathbb{R}$ の部分集合 M が $\sup M$ を持つとき、ただ一通りに定まる。
2. $s = \sup M$ であるための必要十分条件は、
   (a) $m \leq s \quad (\forall m \in M)$
   (b) $x < s$ ならば、$x < m \leq s$ を満たす $m \in M$ が存在する。

   が成り立つことである。
3. $M \subset N$ ならば、$\sup M \leq \sup N$

1.2 集合の直径と有界性

定義 1.4 (開球). 距離空間 (X, ρ) が与えられているとき、任意の $r > 0$, $\boldsymbol{x}_0 \in X$ に対して、$\boldsymbol{x}_0$ を中心とした半径 r の $\rho-$ **開球 *(open ball)*** を

$$B_r(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < r\}$$

で定義する。

定義 1.5 (直径). A を距離空間 (X, ρ) の部分集合とするとき、

$$Diam_\rho(A) = \sup\{\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A\}$$

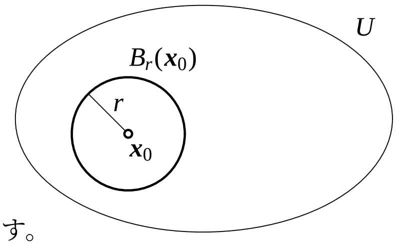
を集合 A の**直径**と言う。$Diam_\rho(A) < \infty$ のとき、$A \subset X$ は**有界**という。

練習問題 1.3.

1. $Diam_\rho(B_r(\boldsymbol{x}_0, \rho)) \leq 2r \quad for\ \forall \boldsymbol{x}_0 \in X$
2. $A \subset B \Rightarrow Diam_\rho(A) \leq Diam_\rho(B)$
3. A が有界であるための必要十分条件は、任意の $\boldsymbol{x}_0 \in X$ を固定するとき、$r > 0$ が存在して、$A \subset B_r(\boldsymbol{x}_0)$ を満たすことである。
4. $A_1, A_2, \cdots, A_m \subset X$ が有界なとき、$\bigcup_{j=1}^m A_j$ は有界である。

1.3　近傍・点列

1.3.1　近傍系



定義 1.6 (近傍). (X,ρ) を距離空間とする。任意の $\boldsymbol{x}_0 \in X$ に対して、
集合 $U \subset X$ が x_0 の**近傍 *(neighborhood)*** であるとは、$r > 0$ が存在して

$$B_r(\boldsymbol{x}_0) \subset U$$

を満たすことである。$\boldsymbol{x}_0$ の近傍全体の集合を $\boldsymbol{x}_0$ の**近傍系**といい、$\mathfrak{V}(\boldsymbol{x}_0)$ と記す。

命題 1.2. 近傍は次の性質を満たす。

V1) U が $\boldsymbol{x}_0$ の近傍ならば、$\boldsymbol{x}_0 \in U$

V2) U, V が $\boldsymbol{x}_0$ の近傍ならば、$U \cap V$ は $\boldsymbol{x}_0$ の近傍

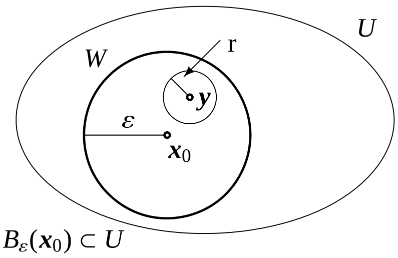
V3) U が $\boldsymbol{x}_0$ の近傍で、$U \subset V$ ならば、V は $\boldsymbol{x}_0$ の近傍

V4) U が $\boldsymbol{x}_0$ の近傍ならば、$\boldsymbol{x}_0$ の近傍 $W \subset U$ が存在して、任意の $\boldsymbol{y} \in W$ に対し、U は $\boldsymbol{y}$ の近傍である。

練習問題 1.4. 近傍の公理 $V4$).

U が $\boldsymbol{x}_0$ の近傍ならば、$\boldsymbol{x}_0$ の近傍 $W \subset U$ が存在して、任意の $\boldsymbol{y} \in W$ に対し、U は $\boldsymbol{y}$ の近傍である。

を示せ。



証明. U は $\boldsymbol{x}_0$ の近傍だから、定義より、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{such that} \quad B_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) \subset U$$

$B_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ も $\boldsymbol{x}_0$ の近傍になることに注意して、$W = B_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ とおいたときに、任意の $\boldsymbol{y} \in W$ に対して、U が $\boldsymbol{y}$ の近傍になっていることを示せばいい。実際、

$$r = \min\{\rho(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}),\ \varepsilon - \rho(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y})\}$$

とおけば、$\boldsymbol{z} \in B_r(\boldsymbol{y})$ ならば、

$$\rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_0) \leq \rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) + \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0) \leq \varepsilon - \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0) + \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0) = \varepsilon$$

より $\boldsymbol{z} \in B_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ だから、$B_r(\boldsymbol{y}) \subset B_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) = W$. したがって、$B_r(\boldsymbol{y}) \subset W$ なる $r > 0$ が存在する。$W \subset U$ だから、近傍の性質 $V3$. により、U は $\boldsymbol{y}$ の近傍である。 □

1.3.2 開球の具体例

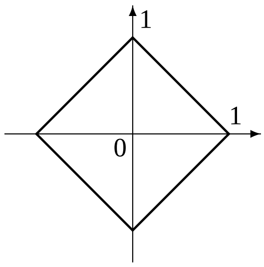
1) $B_1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|_1 < 1\}$　　単位球

2) $B_2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|_2 < 1\}$　　ユークリッド単位円板

3) $B_\infty := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\|_\infty < 1\}$

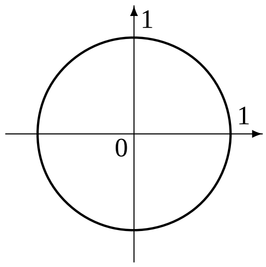
二次元空間 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ を例にとる.

$< B_1 >$



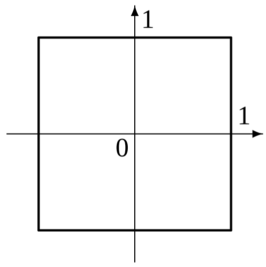
$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| < 1$

$< B_2 >$



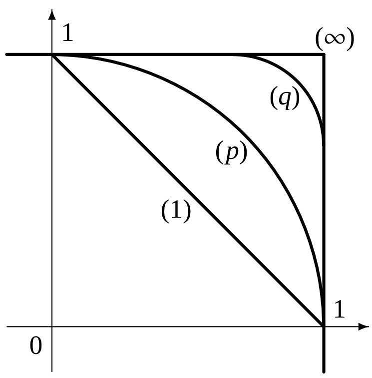
$\|\boldsymbol{x}\|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} < 1$

$< B_\infty >$



$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} < 1$

開球の大きさ（四分球で比較）
$1 < p < q < \infty$ の場合



1.4 点列と点列の収束

定義 1.7 (点列と点列の収束). 距離空間 (X, ρ) が与えられているとき、写像 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ を X の**点列**と言う。X の点列全体の集合を $Map(\mathbb{N}, X)$ と表す。点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が $\boldsymbol{x}_0 \in X$ に収束するとは $\rho(\varphi(n), \boldsymbol{x}_0) \to 0\ (n \to \infty)$ なることを意味する。すなわち

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{such that} \quad \rho(\varphi(n), \boldsymbol{x}_0) < \varepsilon \quad \textit{for}\ \forall n \geq n_0$$

このとき、$\varphi(n) \to \boldsymbol{x}_0\ (n \to \infty)$ あるいは、$\boldsymbol{x}_0 = \rho - \lim_{n\to\infty} \varphi(n)$ と記す。

練習問題 1.5. 点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が点 $\boldsymbol{x}_0 \in X$ に収束する必要十分条件は、任意の $\boldsymbol{x}_0$ の近傍 V に対して

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{such that} \quad \varphi(n) \in V \quad \textit{for } \forall n \geq n_0$$

が成立することである。

定義 1.8 (*Cauchy* 列). 距離空間 (X, ρ) が与えられたとき、点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が *Cauchy* **列** であるとは、

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{such that} \quad \rho(\varphi(m), \varphi(n)) < \varepsilon \quad \textit{for } \forall m, n \geq n_0$$

が成立することである。

練習問題 1.6.

1. 点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が収束するとき、極限 $x_0 \in X$ は唯一確定する。
2. 点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が与えられているとき、$\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が狭義単調（すなわち $m < n \Rightarrow \tau(m) < \tau(n)$）ならば、$\varphi \circ \tau : \mathbb{N} \to X$ を点列 φ の**部分列**という。点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が収束するとき、部分列 $\varphi \circ \tau : \mathbb{N} \to X$ は同一の点に収束する。
3. 点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が収束するとき、集合 $\{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は有界。
4. $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \boldsymbol{a},\ \lim_{n\to\infty} \theta(n) = \boldsymbol{b}$ ならば、
$$\lim_{n\to\infty} \rho(\varphi(n), \theta(n)) = \rho(\lim_{n\to\infty} \varphi(n), \lim_{n\to\infty} \theta(n)) = \rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$
5. 点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ が収束するとき、点列 $\varphi : \mathbb{N} \to X$ は *Cauchy* 列 である。

2　位相空間

2.1　点の位相的分類

定義 2.1. 距離空間 (X, ρ) の部分集合 M が与えられているとする。$\boldsymbol{x} \in X$ の近傍全体の集合を $\mathfrak{V}(\boldsymbol{x})$ とするとき、

1. $\boldsymbol{x} \in M$ が M の**内点** ***(interior point)*** であるとは、$M \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{x})$ を満たすことである。すなわち、
$$\exists r > 0 \quad \textit{such that} \quad B_r(\boldsymbol{x}) \subset M$$
M の内点全体の集合を**開核** ***(interior)*** と呼び、M^i と記す。
$$M^i = \{\boldsymbol{x} \in M \mid \boldsymbol{x} \text{ は } M \text{ の内点}\}$$
2. $\boldsymbol{x} \in X$ が M の**触点** ***(adherent point)*** であるとは、$\forall V \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{x})$ に対し、$V \cap M \neq \emptyset$ を満たすことである。M の触点全体の集合を**閉包** ***(closure)*** と呼び、M^a と記す。
$$M^a = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{x} \text{ は } M \text{ の触点}\}$$

3. $\boldsymbol{x} \in X$ が M の**外点 (exterior point)** であるとは、$\boldsymbol{x}$ が M^c の内点であることである。すなわち $x \in (M^c)^i$
M の外点全体の集合を**外核 (exterior)** と呼び、M^e と記す。すなわち

$$M^e = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{x} \text{ は } M \text{ の外点}\} = (M^c)^i$$

4. $\boldsymbol{x} \in X$ が M の**境界点 (boundary point)** であるとは、$\forall V \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{x})$ について、$X \cap M \neq \emptyset$ かつ、$X \cap M^c \neq \emptyset$ を満たすことである。すなわち、

$$\boldsymbol{x} \in M^a \cap (M^c)^a$$

M の境界点全体の集合を**境界 (boundary)** と呼び、M^f と記す。

$$M^f = \{\boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{x} \text{ は } M \text{ の境界点}\} = M^a \cap (M^c)^a$$

5. $\boldsymbol{x} \in X$ が M の**集積点 (accumulation point)** であるとは、$\boldsymbol{x}$ が $M \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ の触点であることである。すなわち、

$$\boldsymbol{x} \in (M \setminus \{\boldsymbol{x}\})^a$$

6. $\boldsymbol{x} \in X$ が M の**孤立点 (isolated point)** であるとは、$\boldsymbol{x} \in M$ かつ、$\boldsymbol{x} \in X$ が M の触点にならないことである。

練習問題 2.1. (X, ρ) を距離空間。M を X の部分集合とするとき、

1. (a) $M^i \subset M$
   (b) $M \subset M^a$
   (c) $M^e \subset M^c$
2. $M^f = M^a \setminus M^i$
3. (a) $X = M^i \cup M^f \cup M^e$　（互いに素）
   (b) $M^e = (M^c)^i$
   (c) $(M^a)^c = M^e$
   (d) $M^f = M^a \cap (M^c)^a$
   (e) $M^f = (M^c)^f$

練習問題 2.2. (X, ρ) を距離空間。M を X の部分集合とするとき、

1. $M \subset N \Rightarrow M^i \subset N^i$
2. $M \subset N \Rightarrow M^a \subset N^a$

2.2　開集合・閉集合

定義 2.2 (開集合). (X,ρ) を距離空間とする。X の部分集合 U が、$U = U^i$ を満たすとき、U を**開集合 *(open set)*** という。

$$\mathfrak{O}_\rho(X) = \{U \in 2^X \mid U = U^i\}$$

を距離空間 (X,ρ) の**開集合系**という。

定義 2.3 (閉集合). (X,ρ) を距離空間とする。X の部分集合 A が、$A = A^a$ を満たすとき、A を**閉集合 *(closed set)*** という。

$$\mathfrak{A}_\rho(X) = \{A \in 2^X \mid A = A^a\}$$

を距離空間 (X,ρ) の**閉集合系**という。

定理 2.1 (開集合の性質).

1. $X, \emptyset$ は開集合である。

2. U, V が開集合ならば、$U \cap V$ は開集合である。

3. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X 上の開集合族とするなら、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は開集合である。

4. 任意の $\boldsymbol{x} \in X,\ r > 0$ に対して、

$$B_r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in X \mid \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) < r\}$$

は開集合である。

5. M^i は M に含まれる最大の開集合である。

練習問題 2.3. 開集合の性質

5. M^i は M に含まれる最大の開集合である。

を示せ。

証明. M^i **が開集合であること。）** $(M^i)^i \subset M^i$ だから、$M^i \subset (M^i)^i$ となることを示せばいい。任意の $\boldsymbol{x} \in M^i$ に対して定義より、$M \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{x})$ だから近傍の公理 $V4)$ により、$W \subset M$ なる $\boldsymbol{x}$ の近傍 W が存在して、$\boldsymbol{y} \in W$ ならば、$M \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{y})$ を満たす。したがって、$\forall \boldsymbol{y} \in W \Rightarrow M \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{y}) \Rightarrow \boldsymbol{y} \in M^i$ だから、$W \subset M^i$. 近傍の公理 $V3)$ により、$M^i \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{x})$. 故に、$\boldsymbol{x} \in (M^i)^i$ だから、$M^i \subset (M^i)^i$.

M^i **の最大性。）** $U \subset M$ を M に含まれる開集合とすれば、$U^i = U$ だから任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対して、$U \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{x})$. 近傍の公理 $V3)$ により、$M \in \mathfrak{V}(\boldsymbol{x})$. ゆえに、$\boldsymbol{x} \in M^i$ だから、$U \subset M^i$.

□

定理 2.2. 距離空間 (X,ρ) の部分集合 $A \subset X$ について次は同値である。

1. $A \subset X$ が閉集合である。

2. A の補集合 A^c は開集合である。

3. 任意の点列 $\varphi:\mathbb{N}\to A$ が X における収束列ならば、$\rho-\lim_{n\to\infty}\varphi(n)\in A$ である。

練習問題 2.4. 1. と 3. の同値性を示せ。

証明. 1. ⇒ 3.) $\rho-\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=\boldsymbol{x}_0\in X$ とおけば収束の定義により、任意の $V\in\mathfrak{V}(\boldsymbol{x}_0)$ に対して、$\varphi(n)\in V \quad (n\geq n_0)$ なる $n_0\in\mathbb{N}$ が存在する。このとき、$n\geq n_0$ を満たす $n\in\mathbb{N}$ に関して、$\varphi(n)\in V\cap A$ だから、$V\cap A\neq\emptyset$. したがって、$\boldsymbol{x}_0\in A^a$ となるから、A が閉集合であることにより、$\boldsymbol{x}_0\in A$.

3. ⇒ 1.) $\forall\boldsymbol{x}_0\in A^a$ とすれば、閉包の定義により、

$$\varphi(n)\in B_{\frac{1}{n}}(\boldsymbol{x}_0)\cap A \quad n=1,2,\cdots$$

を満たす点列 $\varphi:\mathbb{N}\to A$ を作ることができる。このとき、$\rho-\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=\boldsymbol{x}_0$ となるから、仮定から $\boldsymbol{x}_0\in A$. 故に、$A^a\subset A$ を満たすから、A は閉集合である。

□

定理 2.3 (閉集合の性質).

1. $X,\emptyset$ は閉集合である。

2. U,V が閉集合ならば、$U\cup V$ は閉集合である。

3. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X 上の閉集合族とするなら、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ は閉集合である。

4. 任意の $\boldsymbol{x}\in X,\ r>0$ に対して、閉球

$$\tilde{B}_r(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in X\mid\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\leq r\}$$

は閉集合である。

5. $M\subset X$ について M^a は、M を含む包含関係における最小の閉集合である。

記録者　S.K、　編集　J.S